Parte 2. Métodos directos para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Gustavo Montero

Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales
University of Las Palmas de Gran Canaria

Curso 2006-2007

Revisión de algunos conceptos

Matriz simétrica

Se dice que una matriz A es simétrica si $A^t = A$.

Matriz definida positiva

Se dice que una matriz A es definida positiva si $x^t Ax > 0, \qquad \forall x \neq 0 \in R^n$.

Matriz ortogonal

Se dice que una matriz A es ortogonal si $A^t = A^{-1}$, es decir, $A^t A = I$.

Matrices semejantes

Sea C cualquier matriz no singular de la misma dimensión que A. Entonces las matrices A y $C^{-1}AC$ se dice que son semejantes.

Polinomio característico

Valor propio

Se dice que el número λ, real o complejo, es un valor propio de A si existe un vector no nulo u, real o complejo tal que
$Au = \lambda u, \qquad \text{es decir} \qquad (A - \lambda I)u = 0$

Vector propio

El vector u se denomina vector propio de A asociado al valor propio λ.

Polinomio característico

En general, el polinomio que resulta de desarrollar $|A - \lambda I|$, cuyos ceros son precisamente los valores propios de A, se denomina polinomio característico.

Radio espectral

Se denomina radio espectral ρ de una matriz A al valor

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$$

Propiedades

- Si λ es complejo, entonces u es complejo.
- Los valores propios de $C^{-1}AC$ son los mismos de A.

Normas vectoriales y normas matriciales

Norma matricial y radio espectral

- Si $A \in R^{n,n}$, toda norma matricial verifica $\rho(A) \leq \|A\|$.
- Dada $A \in R^{n,n}$ y $\varepsilon > 0$ cualquiera, existe una norma matricial $\| \cdot \|_\varepsilon$ tal que $\|A\|_\varepsilon \leq \rho(A) + \varepsilon$
- Para todo $A \in R^{n,n}$ se tiene que: $\rho(A) = \inf \|A\|$.

Sucesiones Matriciales

Sea $A_1, A_2, A_3, \ldots$, una sucesión de matrices cuadradas de orden n. Se dice que la sucesión tiene por límite la matriz cuadrada A de orden n, cuando r tiende a infinito si

$$\lim_{r \to \infty} \|A_r - A\| = 0$$

para una norma matricial cualquiera.

Teorema

Sea $A \in R^{n,n}$, la condición necesaria y suficiente para que

$$\lim_{m \to \infty} A^m = 0$$

es que $\rho(A) < 1$.

Vector residuo. Número de condicionamiento

Sea el sistema lineal de ecuaciones $Ax = b$.

Vector residuo
Se define el vector residuo del sistema como $r = b - Ax$.

Número de condición

Se define el numero de condición del sistema $\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\| \geq \|AA^{-1}\| = \|I\| \geq 1$.

Error y condicionamiento

$$e = x^* - x$$

$$\frac{1}{\kappa(A)} \frac{\|r\|}{\|b\|} \leq \frac{\|e\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|r\|}{\|b\|}$$

Generalidades sobre métodos directos

Resolución de sistemas triangulares

Supongamos que A es una matriz triangular superior ($a_{ij} = 0$ si $i > j$. Entonces,

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}, \qquad x_k = \frac{1}{a_{kk}} \left(b_k - \sum_{j=k+1}^{n} a_{kj} x_j \right), k = n-1, n-2, \ldots, 1$$

Número total de operaciones:

- Multiplicaciones/divisiones: $\dfrac{n^2 + n}{2}$
- Sumas/restas: $\dfrac{n^2 - n}{2}$

Si fuera triangular inferior se resolvería de forma similar

Métodos directos

Un método se dice que es directo si obtiene la solución exacta (en ausencia de errores de blackondeo) en un número finito de pasos.

Un primer método de resolución consistirá en multiplicar A por M, tal que MA sea triangular:

$$\text{Si} \quad MA = U \quad \text{y} \quad Mb = c \quad \text{entonces} \quad Ax = b \longrightarrow Ux = c$$

¡¡¡Prohibido usar el método de Cramer!!!

El método de Cramer, con $(n+1)!n - 1$ operaciones, resulta prohibitivo para resolver grandes de sistemas.

Método de Gauss

Pivote parcial

- Cuando se realiza la elección del pivote, podemos tener problemas si este es nulo o incluso si es muy pequeño en valor absoluto.
- La técnica de pivoteo parcial, trata de evitar este problema tomando en cada paso i-ésimo el mayor pivote posible, en valor absoluto, en esa misma columna (a_{pi}) por debajo de la diagonal ($p \geq i$).
- Esto implica intercambio de las filas i por la p: $(E_i) \leftrightarrow (E_p)$.
- Evidentemente, el mismo cambio afecta al vector segundo miembro b.
- Añade al método de Gauss $\frac{3}{2}n(n-1)$ comparaciones y $\frac{n(n+1)}{2} - 1$ divisiones.

Pivote total

- La técnica de pivoteo total refina aún más la elección, tomando en cada paso i-ésimo el mayor pivote posible en valor absoluto (a_{pq}), en todas las columnas q a partir de la diagonal ($q \geq i$) y por debajo de la diagonal ($p \geq i$).
- Esto implica intercambio de las filas i por la p: $(E_i) \leftrightarrow (E_p)$, y de las columnas i por la q: $(C_i) \leftrightarrow (C_q)$.
- El cambio de filas afecta al vector b y el de columnas al vector x.
- Añade al método de Gauss $\frac{n(n-1)(2n+5)}{6}$ comparaciones.

Algoritmo de la factorización LU

Elección de la diagonal

Se fijan arbitrariamente l_{kk} o u_{kk}

- Si se fijan los elementos diagonales de U como 1, $u_{kk} = 1$, se tiene la factorización de Crout.
- Si se fijan los elementos diagonales de L como 1, $l_{kk} = 1$, se tiene la factorización de Doolittle.

Existencia de la factorización

Si $|A| \neq 0$, siempre existe una permutación de las filas de A tal que la matriz resultante es factorizable de la forma LU.

Almacenamiento

Frecuentemente se suele almacenar L y U sobre el mismo espacio de A, en las respectivas partes triangulares.

Número de operaciones

- Multiplicaciones/divisiones: $\dfrac{n^3 - n}{3} \qquad + \qquad n^2$
- Sumas/restas: $\dfrac{n^3}{3} - \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n}{6} \qquad + \qquad n^2 - n$

Algoritmo de la Factorización de Cholesky

Teorema de caracterización de matrices simétricas definidas positivas

Una matriz es simétrica definida positiva si y sólo si admite descomposición de Cholesky.

Otras aplicaciones

- Calcular el determinante de una matriz simétrica definida positiva:

$$|A| = |LL^t| = |L||L^t| = |L|^2 = \prod_{i=1}^{n} l_{ii}^2$$

- Resolver el sistema $Ax = b$:

$$Ly = b, \qquad L^t x = y$$

Almacenamiento

Sólo es necesario almacenar L ya que L^t tiene simétricamente las mismas entradas.

Número de operaciones

- Raíces cuadradas: n
- Multiplicaciones/divisiones: $\dfrac{n^3 + 3n^2 - 4n}{6} \quad + \quad n^2 + n$
- Sumas/restas: $\dfrac{n^3 - n}{6} \quad + \quad n^2 - n$

Planteamiento del problema

Planteamiento del problema

Sea una matriz A a la que se presente obtener su inversa X, entonces

$$AX = I$$

Esto significa resolver n sistemas de ecuaciones lineales con la misma matriz, donde los segundos miembros son los vectores de la base canónica. De cada sistema j-ésimo se obtiene la j-ésima columna de la matriz inversa X:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_{1j} + a_{12}x_{2j} + \cdots + a_{1n}x_{nj} &= 0 \\
a_{21}x_{1j} + a_{22}x_{2j} + \cdots + a_{2n}x_{nj} &= 0 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad & \vdots \quad \vdots \\
a_{j1}x_{1j} + a_{j2}x_{2j} + \cdots + a_{jn}x_{nj} &= 1 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad & \vdots \quad \vdots \\
a_{n1}x_{1j} + a_{n2}x_{2j} + \cdots + a_{nn}x_{nj} &= 0
\end{aligned}$$

Resolución del problema

El procedimiento más adecuado es utilizar la factorización de Cholesky si el problema es simétrico o la LU si no lo es. De esta forma, las operaciones de triangulación sólo se realizan una vez.
Esto supone el coste de una factorización y n procesos de remonte de dos sistemas triangulares.

Número de operaciones

Caso simétrico

- Raíces cuadradas: n
- Multiplicaciones/divisiones: $\dfrac{n^3 + 3n^2 - 4n}{6} \qquad + \qquad n(n^2 + n)$
- Sumas/restas: $\dfrac{n^3 - n}{6} \qquad + \qquad n(n^2 - n)$

Caso no simétrico

- Multiplicaciones/divisiones: $\dfrac{n^3 - n}{3} \qquad + \qquad n(n^2)$
- Sumas/restas: $\dfrac{n^3}{3} - \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n}{6} \qquad + \qquad n(n^2 - n)$

Resumen

- El número de operaciones que realizan los métodos directos para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales es de orden n^3.
- La técnica de pivoteo parcial suele conducir a mejores resultados que la de pivoteo trivial en sistemas mal condicionados. Sin embargo, el pivoteo total resulta excesivamente costoso en relación al coste total de resolución.
- Aunque el método de Gauss y la factorización LU se pueden utilizar para resolver cualquier tipo de sistema, para el caso simétrico el método de Cholesky es menos costoso y por tanto preferible.
- Cuando se trata de resolver un conjunto de sistemas de ecuaciones con la misma matriz, conviene utilizar un método de factorización, ya que sólo es necesario realizarla una vez.