Parte 4. Métodos iterativos para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Gustavo Montero

Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

Curso 2006-2007

Generalidades de los métodos iterativos

Metodo de Jacobi

Método de Gauss-Seidel

Método de Relajación Sucesiva

Convergencia de los métodos

Resumen

Introducción

Ventaja frente a los métodos directos

Son menos sensibles a los errores de blackondeo y esto se aprecia en sistemas de orden elevado donde los errores de blackondeo de los métodos directos son considerables

Definición de método iterativo

Un método iterativo construye una sucesión de vectores x_m tal que

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} x_m = x$$

siendo x la solución del sistema $Ax = b$.

Construcción de un método iterativo

Se parte de una aproximación inicial x_0 y luego se calcula

$$x_{m+1} = F(x_m), \qquad m = 0, 1, \ldots$$

donde F se toma de forma lineal: $F(x) = B\,x + c$

$$x_{m+1} = B\,x_m + c, \qquad m = 0, 1, \ldots$$

La matriz B se denomina matriz de iteración y de sus propiedades va a depender la convergencia del método.

Definición de convergencia

Definición de convergencia

Un método se dice que es convergente si:

$$\lim_{m\to\infty} x_m = x = A^{-1}b$$

Teorema del Punto Fijo

Aplicando el Teorema del Punto Fijo,

$$||F(x') - F(x'')|| \leq L||x' - x''||$$

es decir,

$$||Bx' - Bx''|| \leq L||x' - x''||$$

Luego si $v = x' - x'' \implies ||Bv|| \leq L||v||$

Teorema general para la convergencia de los métodos iterativos

Un método iterativo del tipo anterior es convergente si y sólo si se cumplen simultáneamente las siguientes condiciones,

- $c = (I - B)A^{-1}b$
- $\rho(B) < 1$

Construcción de métodos iterativos

Sea $A = M - N$, con M invertible

Teorema de caracterización de métodos iterativos

Si se toma,

$$\begin{aligned} B &= M^{-1}N \\ c &= M^{-1}b \end{aligned}$$

el método considerado cumple la primera condición anterior.

Pero además se debe cumplir la segunda condición,

$$\rho(M^{-1}N) < 1 \qquad \text{o también} \qquad ||M^{-1}N|| < 1$$

Teorema de construcción de los métodos iterativos

Todo método del tipo estudiado verifica las condiciones del teorema anterior con $M - N = A$ y M invertible.

El método resulta,

$$x_{m+1} = M^{-1}Nx_m + M^{-1}b$$

es decir,

$$Mx_{m+1} = Nx_m + b$$

Por tanto, conviene elegir M tal que sea fácilmente invertible (diagonal o triangular).

El número de operaciones de los métodos iterativos es $O(n^2) \times$ n° iter

Algoritmo de Jacobi

Matriz de iteración de Jacobi

La matriz de iteración de Jacobi resulta,

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \cdots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ -\frac{a_{31}}{a_{33}} & -\frac{a_{32}}{a_{33}} & 0 & \cdots & -\frac{a_{3n}}{a_{33}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n3}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Descomposición suma de una matriz

Sea $A = D - L - U$, con

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn-1} & 0 \end{pmatrix}; \quad U = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -a_{n-1n} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Algoritmo

El método de Jacobi consiste en elegir $M = D$ y $N = L + U$, resultando en forma matricial,

$$Dx_{m+1} = (L + U)x_m + b$$

es decir,

$$a_{ii}(x_{m+1})_i = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij}(x_m)_j + b_i; \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Algoritmo de Gauss-Seidel

Algoritmo

El método de Gauss-Seidel consiste en elegir $M = D - L$ y $N = U$, resultando en forma matricial,

$$(D - L)x_{m+1} = Ux_m + b$$

es decir,

$$\sum_{j=1}^{i} a_{ij}(x_{m+1})_j = -\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}(x_m)_j + b_i; \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

o, finalmente,

$$a_{ii}(x_{m+1})_i = -\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}(x_{m+1})_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}(x_m)_j + b_i; \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Ventaja frente a Jacobi

- Menor requerimiento de almacenamiento respecto a Jacobi, ya que no necesita dos vectores para la solución (x_{m+1}, x_m). En el método de Gauss-Seidel las actualizaciones de la solución se guardan en las posiciones de los valores anteriores
- El método de Gauss-Seidel tiene mejores condiciones de convergencia que el de Jacobi

Algoritmo de Relajación Sucesiva

Algoritmo

Si tomamos un parámetro $\omega \neq 0$, podemos hacer la descomposición de A de la forma,

$$A = D - L - U = \frac{1}{\omega} D - L - \frac{1-\omega}{\omega} D - U$$

y eligiendo $M = \dfrac{1}{\omega} D - L$, $N = \dfrac{1-\omega}{\omega} D + U$, resulta

$$\left(\frac{1}{\omega} D - L \right) x_{m+1} = \left(\frac{1-\omega}{\omega} D + U \right) x_m + b$$

$$\frac{1}{\omega} a_{ii} (x_{m+1})_i + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} (x_{m+1})_j = \frac{1-\omega}{\omega} a_{ii} (x_m)_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} (x_m)_j + b_i; \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

Algoritmo en dos pasos

El algoritmo SSOR se puede expresar en dos pasos, un primer paso que coincide con el método de Gauss-Seidel un segundo paso de relajación de la solución,

$$\begin{aligned} a_{ii} (\bar{x}_{m+1})_i + \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} (x_{m+1})_j &= \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} (x_m)_j + b_i; \qquad i = 1, 2, \ldots, n \\ (x_{m+1})_i - (x_m)_i &= \omega \left((\bar{x}_{m+1})_i - (x_m)_i \right) \end{aligned}$$

Resumen de resultados de Convergencia

Si A es simétrica y definida positiva, el método de Gauss-Seidel converge.

Si A es simétrica y la matriz

$$D + L + U = \begin{pmatrix} a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{12} & a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

es definida positiva, el método de Jacobi es convergente.

Si A es simétrica y definida positiva, el método de relajación converge si y sólo si $0 < \omega < 2$.
Si $\omega < 1$ el método se denomina de subrelajación y si $\omega > 1$, de sobrerrelajación.

Si A es simétrica, definida positiva y tridiagonal, el valor óptimo de ω para la convergencia del método de relajación es,

$$\omega = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho_j^2}}$$

siendo ρ_j el radio espectral de la matriz de iteración del método de Jacobi.

Resumen

- Los métodos iterativos tienen un coste computacional de $O(n^2) \times n^o$ *iteraciones*. Si el número de iteraciones es pequeño comparado con n, los métodos iterativos son preferibles a los directos. Asimismo, los errores de blackondeo no se acumulan después de cada iteración, lo que supone una ventaja adicional.
- El método de Gauss-Seidel es usualmente más eficiente que el de Jacobi
- Podemos acelerar la convergencia mediante la técnica de relajación. Generalmente se suele utilizar valores de ω entre 1 y 2 (sobrerelajación)
- En la actualidad los métodos iterativos estudiados en esta asignatura están obsoletos. Los métodos más utilizados son los basados en los subespacios de Krylov.