

Parte 5. Métodos iterativos para la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales

Gustavo Montero

Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

Curso 2006-2007

Introducción

Planteamiento del problema

Obtener la solución $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ del sistema de ecuaciones no lineales,

$$\begin{aligned}f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\&\vdots \\f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0\end{aligned}$$

Representación matricial

Si llamamos $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $f(x) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, x_2, \dots, x_n))$, se puede escribir la ecuación vectorial,

$$f(x) = 0$$

que se puede transformar en

$$x = g(x)$$

Relación con la resolución de una ecuación

Los resultados obtenidos para la resolución de una ecuación se pueden generalizar a n ecuaciones con n incógnitas, cambiando el concepto de valor absoluto $|\cdot|$ por el de norma $\|\cdot\|$.

Algoritmo de Punto Fijo

Replanteamiento del sistema no lineal

Se basan en general en plantear el sistema de ecuaciones no lineales original de la forma

$$\begin{aligned}x_1 &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\x_2 &= g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\&\vdots \\&\vdots \\x_n &= g_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned}$$

Aproximaciones sucesivas

Partiendo de una aproximación inicial x_0 , se construye una sucesión de vectores $\{x_m\}$ utilizando la relación,

$$x_{m+1} = g(x_m), \quad m = 0, 1, \dots$$

Algoritmo de Newton-Raphson

Obtención del algoritmo

De forma similar a como sucedía con una sola ecuación, se toma

$$g(x) = x - A(x) f(x)$$

siendo $A(x)$ una matriz $n \times n$ no singular $\forall x$.
El algoritmo resulta,

$$x_{m+1} = x_m - A(x_m) f(x_m)$$

Si se toman los elementos a_{ij} de $A(x)$ constantes se tiene que,

$$g_i(x) = x_i - \sum_{k=1}^n a_{ik} f_k(x)$$

Algoritmo de Newton-Raphson

Por tanto, el algoritmo de Newton-Raphson para sistemas de ecuaciones no lineales resulta,

$$x_{m+1} = x_m - J^{-1}(x_m) f(x_m)$$

Obtención de la matriz A

Para elegir a_{ik} , derivamos respecto a x_j

$$\frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} = \delta_{ij} - \sum_{k=1}^n a_{ik} \frac{\partial f_k(x)}{\partial x_j}$$

siendo $\delta_{ij} = 1$ y $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$. De forma matricial,

$$G(x) = I - A J(x)$$

siendo $G(x)$ y $J(x)$ las matrices jacobianas de g y f , respectivamente.

Para que exista convergencia

$$G(s) = I - A J(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = J^{-1}(s)$$

Como sucedía en el caso de una sola ecuación, no conocemos la solución s y definimos A en función de x ,

$$A(x) = J^{-1}(x)$$

Implementación usual del algoritmo de Newton-Raphson

Utilización de un vector incremental

El cálculo de $J^{-1}(x_m)$ no se realiza explícitamente, sino que se plantea un sistema de ecuaciones lineales en cada iteración del método de Newton-Raphson,

$$J(x_m) (x_{m+1} - x_m) = -f(x_m)$$

tomando como incógnita,

$$y_m = x_{m+1} - x_m$$

Una vez resuelto el sistema lineal $J(x_m) y_m = -f(x_m)$, la solución es actualizada de la forma,

$$x_{m+1} = x_m + y_m$$

Algoritmo de Newton Modificado

Simplificación del algoritmo de Newton-Raphson

Si no actualizamos la matriz Jacobiana $J(x_0)$ y la mantenemos constante a lo largo de todas las iteraciones del proceso de Newton-Raphson, se obtiene el método de Newton-Modificado,

$$J(x_0) y_m = -f(x_m)$$

$$x_{m+1} = x_m + y_m$$

Resumen de resultados de Convergencia

Sea $g(x)$ tal que

► $g(x) \in D, \quad \forall x \in D$

► $\exists L < 1$ tal que $\|g(x) - g(x')\| \leq L\|x - x'\|, \quad \forall x, x' \in D$

siendo

$$D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$$

Entonces existe una raíz única s de la ecuación $f(x) = x - g(x) = 0$.

Si todas las funciones $g_i(x)$ son $C^1(D)$ y se verifica

$$\left| \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} \right| \leq \frac{L}{n}, \quad \forall x \in D \text{ con } L < 1, \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n$$

entonces se cumple la segunda condición del teorema anterior, para las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$.

En el caso $\|\cdot\|_2$ debemos sustituir $\frac{L}{n}$ por $\frac{L}{n^{3/2}}$.

Se puede sustituir las dos condiciones del primer teorema por,

► $g(x)$ es Lipschitziana con $L < 1$ y $\|x - \alpha\| \leq r$

► $\|\alpha - g(\alpha)\| \leq (1 - L)r$

Resumen

- ▶ En general, los métodos numéricos de resolución de sistemas de ecuaciones no lineales están basados en una linealización del sistema en cada iteración de proceso iterativo, que se traduce en la resolución de un sistema de ecuaciones lineales en cada paso.
- ▶ El método de Newton-Raphson es más rápido que el Modificado y, en general, que cualquiera de punto fijo obtenido de una elección arbitraria de la función $g(x)$. En cambio, tiene la desventaja de necesitar actualizar la matriz Jacobiana en cada iteración, lo que supone un coste computacional adicional frente a los otros métodos estudiados.
- ▶ El método de Newton Modificado trata de eliminar este inconveniente, utilizando en todo el proceso la misma matriz Jacobiana $J(x_0)$. El menor coste por iteración debido a esta simplificación se traduce, no obstante, en un aumento del número de pasos necesarios para alcanzar la convergencia.
- ▶ La utilización de un método de Punto Fijo elimina la resolución de un sistema de ecuaciones lineales en cada iteración, al venir definidos los nuevos valores de la aproximación de forma explícita. Sin embargo, la convergencia normalmente es difícil de alcanzar y se debe comprobar las condiciones de los teoremas que aseguran la convergencia antes de definir las expresiones de $g_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$.